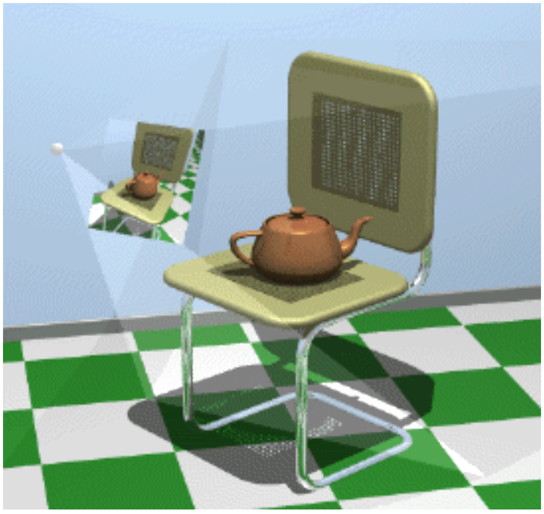
Computer-Graphik I
Transformationen & Viewing

G. Zachmann
Clausthal University, Germany
zach@in.tu-clausthal.de

Motivation

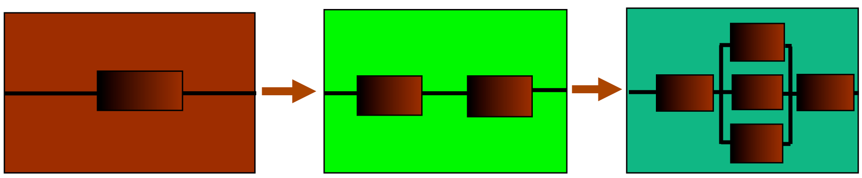
- Man möchte die virtuelle 3D Welt auf einem 2D Display darstellen



Motivation

- Transformationen werden benötigt, um ...
  - Objekte, Beleuchtung und Kamera zu positionieren und animieren;
  - alle Berechnungen im selben Koordinatensystem durchzuführen;
  - Objekte zu projizieren
- OpenGL verwendet 4x4-Matrizen zur Spezifikation von Transormationen
- Viewing = welche Transformationen muß man verwenden, um die 3D-Welt auf den 2D-Bildschirm zu projizieren

Die Graphik-Pipeline (stark vereinfacht)



Anwendung

Geometrie-Stufe

Alle Berechnungen, die 1x pro Polygon oder pro Vertex (Ecke) durchgeführt werden
Z.B.:
- Modell- und Viewing-Transformation
- Projektion
- Beleuchtung
- Clipping

Arbeitet im 3D

Im folgenden diese Tasks

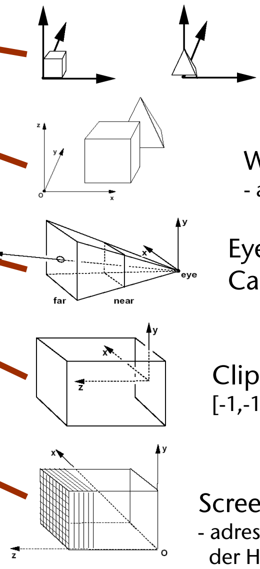
Raster-Stufe

Kennen wir (teilweise) schon
Z.B.:
- Scan Conversion

Arbeitet im 2D

Koordinatensysteme in der Pipeline

- Modeling Transformations
- Illumination (Shading)
- Viewing Transformation (Perspective / Orthographic)
- Clipping
- Projection (to Screen Space)
- Scan Conversion (Rasterization)
- Visibility / Display



Object space
- Lokal für jedes Objekte

World space
- alle Objekte

Eye Space / Camera Space

Clip Space (NDC)
[-1,-1,-1] ... [1,1,1]

Screen Space
- adressiert entsprechend der Hardware

Lineare und affine Abbildung

- Lineare Transformationen (z.B. Rotation, Skalierung und Scherung) können durch eine 3x3 Matrix dargestellt werden

$$x' = A\cdot(\alpha x + \beta y) = \alpha A\cdot x + \beta A\cdot y$$

- Affine Transformationen (z.B. Translation), können **nicht** als 3x3 Matrix dargestellt werden

$$x' = A\cdot x + t$$

- Merke die Konvention

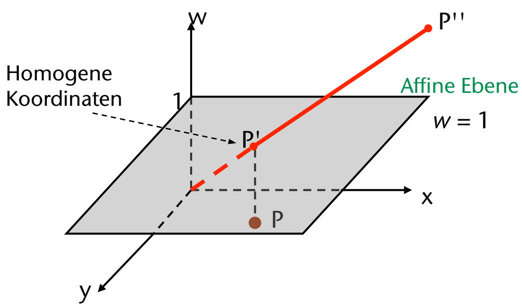
"Matrix mal Vektor"

Homogene Koordinaten im 3D

- Homogene Darstellung ist nützlich für Transformationen von Punkten und Vektoren
- Erweitert 3D Punkte und Vektoren zu 4D Punkte und Vektoren
- Homogener Punkt $P = (p_x, p_y, p_z, p_w) \quad p_w = 1$
- Homogener Vektor $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z, p_w) \quad p_w = 0$

Veranschaulichung im 2D

- Erweitere Punkt P = (x,y) zu P' = $(x,y,1)$
- Assoziiere Linie $w \cdot (x,y,1) = (wx, wy, w)$ mit P'



- M.a.W.: ein 3D-Vektor (x, y, w) beschreibt ...
  - ... den 2D-Punkt $(x/w, y/w)$ für $w \neq 0$
  - ... den 2D-Vektor (x, y) für $w = 0$

Homogenisierung im 3D

- Der homogene Punkt

$$P = (x, y, z, w) \quad w \neq 0$$

beschreibt den Punkt an der Stelle

$$P = \left(\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{z}{w}\right)$$

Operationen auf Punkten und Vektoren in homogenen Koord.

- Punkt + Vektor = Punkt

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x + v_x \\ p_y + v_y \\ p_z + v_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Vektor + Vektor = Vektor

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x + v_x \\ u_y + v_y \\ u_z + v_z \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Punkt – Punkt = Vektor

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x - q_x \\ p_y - q_y \\ p_z - q_z \\ 0 \end{pmatrix}$$

Homogene Matrizen für Transformationen in 3D

- Matrix

$$M = \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

- Homogene Form

$$M_{4x4} = \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & 0 \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & 0 \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lineare Abb. (Matrix-Vektor-Multiplikation)

- 3x3-Form

$$M \cdot \mathbf{p} = \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

- Homogene Form

$$M_{4x4} \cdot \mathbf{p}_4 = \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & 0 \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & 0 \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Affine Abbildungen im 3D

- 3x3-Form

$$M \cdot \mathbf{p} + t = \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix}$$

- Homogene Form

$$M_{4\times4} \cdot \mathbf{p}_4 = \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & t_x \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & t_y \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

- In homogenen Koordinaten lassen sich sogar affine Abbildungen als einfache Matrix-Vektor-Multiplikation darstellen!

Grundtransformationen im 3D

- Translation
- Rotation
- Skalierung
- Scherung (kommt in der Praxis fast nie vor)

- Verkettung
- Starrkörpertransformation (*rigid body transformation*)
- Gewöhnliche Transformation

Translation

- Eines Punktes

$$T_t \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x + t_x \\ p_y + t_y \\ p_z + t_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Eines Vektors

$$T_t \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Inverse

$$T_t^{-1} = T_{-t}$$

Rotation

- Rotation um x-, y-, z-Achse um Winkel ϕ

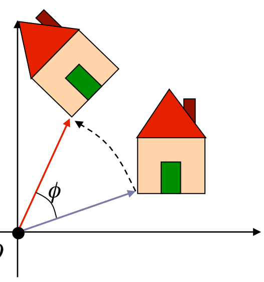
$$R_x(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ?\cos\phi & ?\sin\phi & 0 \\ 0 & ?\sin\phi & ?\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

X-Koord. bleibt unverändert

Vorzeichentest: φ=90 →
y geht nach z, z geht nach -y.

$$R_y(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Orthogonalität

- Rotationsmatrix R ist orthogonal:

$$RR^T = R^T R = I$$

- Folgen:

$$\det(R) = \pm 1$$

$$R^{-1} = R^\mathrm{T}$$

$$R^\mathrm{T} \text{ ist orthogonal}$$

$$\|Rv\| = \|v\| \qquad \text{(Längenerhaltung)}$$

$$(Ru)\cdot(Rv) = u \cdot v \qquad \text{(Winkelerhaltung)}$$

$$R_1, R_2 \text{ sind orthogonal} \Rightarrow R_1 R_2 \text{ sind orthogonal}$$

Skalierung

- Kann zum Vergrößern oder Verkleinern verwendet werden

$$S(s_x, s_y, s_z) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- s_x, s_y, s_z beschreiben Längenänderung in x-, y-, z-Richtung
- Uniforme (isotrope) Skalierung: $s_x = s_y = s_z$
- Nicht-uniforme (anisotrope)
- Inverse

$$S^{-1}(s_x, s_y, s_z) = S\left(\frac{1}{s_x}, \frac{1}{s_y}, \frac{1}{s_z}\right)$$

- Alternative, homogene Skalierungs-Matrix:

$$S(s,s,s) = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s} \end{pmatrix}$$

- Aber besser die "normale" Skalierungsmatrix verwenden

Scherung

- Verschiebt z.B. die x-Koordinate abhängig von der Entfernung zur Ebene z=0 (d.h., xy-Ebene)
- Zum Beispiel: $H_{xz}(s)$ schert den x-Wert gemäß dem z-Wert

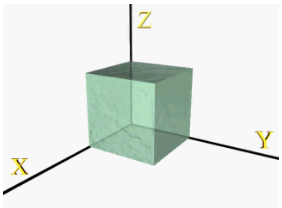
$$H_{xz}(s) \cdot \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & s & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x + sp_z \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Inverse:

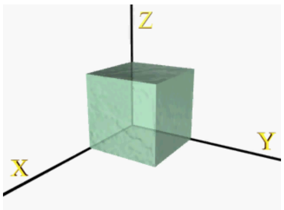
$$H_{xz}^{-1}(s) = H_{xz}(-s)$$

- Achtung: Determinante = 1
  → Volumen bleibt erhalten ...
  aber Winkel werden hier nicht erhalten!

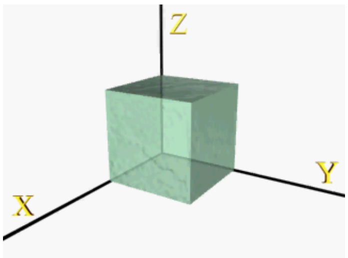
- Movies:



X mit Y



X mit Z



X dann Y mit Z

Spiegelung

- Spiegelung entlang der x-Achse, m.a.W., Spiegelung bzgl. der yz-Ebene:

$$M_x = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

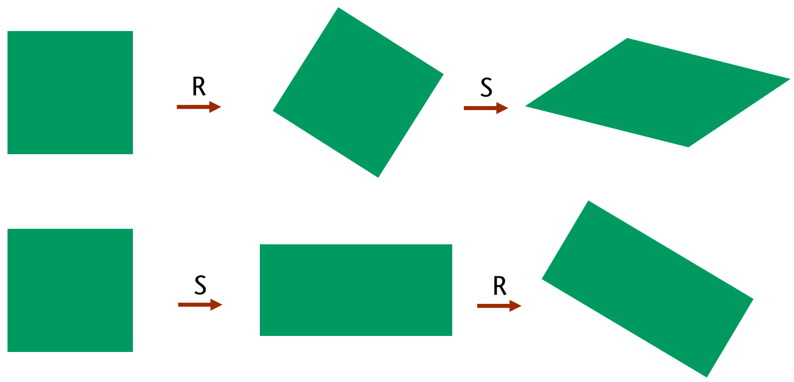
  - Analog die anderen beiden Spiegelungen
- Achtung: $\det(M_x) < 0 \quad !$
  - Bei allen anderen Transformationen *T* bisher war

$$\det(T) > 0$$

- Spiegelungen sind in der CG eigtl. immer ausgeschlossen
  - U.a., weil der Umlaufsinn der Polygone umgedreht wird

Verknüpfung / *Concatenation*

- Nützlich zur Steigerung der Effizienz
- Achtung: Multiplikation von Matrizen ist nicht kommutativ → Reihenfolge der Transformation spielt eine Rolle!
- Beispiel:



- Reihenfolge in einer Matrixkette:

$$p' = M_n \cdot \ldots \cdot M_2 \cdot M_1 \cdot p$$

Reihenfolge der Ausführung